J. Math. Soc. Japan
Vol. 53, No. 2, 2001

# Réduction des groupes algébriques commutatifs

By Boris KUNYAVSKIĬ* and Jean-Jacques SANSUC

(Received Nov. 22, 1999)

**Abstract.** We study a problem of constructing an algebraic torus (an abelian variety) over a $p$-adic field whose Néron model would have a given connected commutative unipotent group as the identity component of its special fibre.

**Résumé.**

Nous étudions le problème de la construction sur un corps $p$-adique d'un tore algébrique (resp. d'une variété abélienne) dont le modèle de Néron ait comme composante neutre de sa fibre spéciale un groupe unipotent commutatif connexe donné sur le corps résiduel.

## 0. Introduction.

En étudiant le problème de réduction d'un groupe algébrique, il faut évidemment préciser le modèle entier, c'est-à-dire le schéma dont les fibres spéciales peuvent être regardées comme réductions. Un modèle entier d'un groupe algébrique $E$ défini sur $K$, corps des fractions d'un domaine intègre $\mathcal{O}$, est défini comme un $\mathcal{O}$-schéma en groupes $\mathcal{E}$ tel qu'il existe un isomorphisme de $K$-groupes $\mathcal{E} \times_{\mathcal{O}} K \simeq E$.

On peut se poser un problème de description, pour $E$ donné, de tous ses modèles entiers. Dans telle généralité, le problème semble désespéré; néanmoins, voir [**37**] où l'on traite le cas de dimension 1.

Dans cet article, nous nous intéressons au cas des tores algébriques, c'est-à-dire de $K$-groupes linéaires algébriques $T$ tels que pour une extension $L/K$ il existe un isomorphisme de $L$-groupes $T \times_K L \simeq \boldsymbol{G}_{m,L}^d$. Parmi les extensions $L$ avec cette propriété, il y a l'extension minimale, c'est une extension galoisienne finie [**34**, 3.36]; on l'appelle le corps de déploiement de $T$.

Pour construire des modèles entiers des tores, il y a plusieurs approches. Le choix d'un modèle convenable dépend de son utilisation ultérieure dans la

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14G20; Secondary 20G25, 14K15.
*Key Words and Phrases.* Algebraic torus, abelian variety, reduction, unipotent group.
*Recherche subventionnée en partie par le Ministère d'Absorption (Israël), par l'Institut Emmy Noether (Fondation Minerva) et par la Fondation Israélienne de Science (ISF) fondée par l'Académie Israélienne des Sciences et des Lettres.

solution des problèmes arithmétiques concrets. Nart et Xarles [**17**], [**38**] utilisent une modification de l'approche de Néron accomodée par Raynaud à la construction des modèles entiers des groupes algébriques non nécessairement propres; nous les appelons modèles de Néron–Raynaud. On les applique à l'étude du schéma des composantes connexes des variétés abéliennes et semi-abéliennes [**4**], [**12**] ainsi que dans la théorie des groupes formels [**5**]. Une autre approche développée dans une série d'articles de Sekiguchi et Suwa [**23**]–[**26**] est fondée sur l'utilisation des modéles spécifiques ayant le tore déployé $\boldsymbol{G}_m^d$ comme fibre générique et le groupe des vecteurs de Witt $\boldsymbol{W}_d$ comme fibre spéciale. Regardant la situation comme déformation des groupes de Witt aux tores, on trouve des applications naturelles dans la construction de la théorie unifiée de Kummer–Artin–Schreier–Witt. Un autre type des modèles entiers, accomodés pour la généralisation aux modèles entiers des variétés toriques et l'étude de la distribution de leurs points entiers, a été introduit dans [**13**]–[**16**]. Enfin, on doit mentionner l'approche de Voskresenskiĭ [**35**], [**36**] envisageant le calcul des nombres de classes et l'application des formules de type Siegel–Tamagawa. En effet, l'approche de Moroz et celle de Voskresenskiĭ sont essentiellement équivalentes; on peut regarder leurs modèles comme modèles de Néron–Raynaud "abrégés"; *voir* [**9**] pour les détails. A la différence des modèles de Néron–Raynaud, ces modèles abrégés ne sont pas toujours lisses, mais ils sont toujours de type fini sur $\mathcal{O}$ et possèdent certaines propriétés de minimalité. Nous les appelons modèles standards.

Dans cet article, nous nous intéressons au problème de réduction des modèles entiers des tores algébriques définis sur un corps $p$-adique $K$.

Au paragraphe 1, nous rappelons la définition des modèles de Néron–Raynaud $\mathcal{T}_{\mathrm{NR}}$ et celle des modèles standards $\mathcal{T}_V$. Nous définissons la réduction d'un tore en termes de ce modèle standard. Au cas de "lisse réduction" correspondant aux tores déployés par une extension modérément ramifiée nous établissons un lien entre ces deux modèles.

Proposition A (Proposition 1.4.). *Si $T$ est un $K$-tore déployé par une extension modérément ramifiée $L/K$, la composante neutre $\mathcal{T}_V^\circ$ de son modèle standard $\mathcal{T}_V$ est $\mathcal{O}$-isomorphe à la composante neutre $\mathcal{T}_{\mathrm{NR}}^\circ$ du modèle de Néron–Raynaud $\mathcal{T}_{\mathrm{NR}}$.*

Au paragraphe 2, nous calculons la réduction pour les tores déployés par une extension modérément ramifiée (Corollaire 2.2). On ramène le cas général à celui des tores normiques où l'on a des formules explicites.

Théorème B (Théorème 2.1.). *Soit $F/K$ une extension totalement ramifiée de degré $m = d + 1$ premier à $p$. Soit $T = R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m$ le tore normique, et soit $\tilde{T}$ sa* *réduction. Alors sa composante neutre $\tilde{T}^\circ$ est isomorphe au produit*

$$\prod_{\substack{1 \le i \le d \\ (i,p)=1}} \boldsymbol{W}_{r_i,k},$$

*où $r_i = \min\{r : p^r \geq m/i\}$, et où $\boldsymbol{W}_n$ est le groupe des vecteurs de Witt de longueur $n$.*

Ça nous permet de répondre à une question posée dans [**17**]: déterminer tous les groupes unipotents qui peuvent apparaître dans la réduction $\tilde{T}^\circ$ d'un $K$-tore $T$.

Théorème C (Théorème 2.2.). *Soit $T$ un $K$-tore de dimension $d$ dont le corps de déploiement $L$ soit modérément ramifié sur $K$. La partie unipotente de $\tilde{T}^\circ$ est alors $k$-isomorphe à un produit de groupes de Witt $\boldsymbol{W}_{n_i,k}$ qu'on peut déterminer explicitement.*

Au paragraphe 3, nous étudions "un problème inverse" pour la réduction. Plus précisément, on peut se poser une question suivante.

Question 0.1. *Étant donnés un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k$, et un $k$-groupe commutatif $B$, existe-t-il un $K$-groupe commutatif $E$ qui admette un modèle de Néron $\mathscr{E}$ de fibre spéciale $\mathscr{E} \times_{\mathcal{O}} k$ isomorphe à $B$?*

On peut spécialiser cette question.

Question 0.2. *Étant donnés un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k$, et un $k$-groupe commutatif $B$, existe-t-il une $K$-variété abélienne $A$ dont le modèle de Néron $\mathscr{A}$ ait la fibre spéciale $\mathscr{A} \times_{\mathcal{O}} k$ isomorphe à $B$?*

La réponse à cette question est positive lorsque $B$ est un $k$-tore. En effet, il faut prendre le produit direct de $\dim_k B$ exemplaires de la courbe de Tate et le tordre par l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$, le groupe de Galois d'une extension non ramifiée, qui correspond au module des caractères de $B$ (*voir* corollaire 5.10). Nous ne considérons pas ici l'autre cas positif où $B$ est une $k$-variété abélienne (*voir* [**19**]). Dans le cas où $B$ est un $k$-groupe unipotent, la question semble d'être ouverte. En particulier, existe-t-il une $K$-surface abélienne $S$ dont le modèle de Néron $\mathscr{S}$ ait la fibre spéciale $\mathscr{S} \times_{\mathcal{O}} k$ isomorphe au groupe des vecteurs de Witt $\boldsymbol{W}_{2,k}$? On verra que l'on peut obtenir une réponse partielle via uniformisation rigide, *voir* §5.

On peut se poser une question pareille pour les tores.

Question 0.3. *Étant donnés un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k$, et un $k$-groupe commutatif affine $B$, existe-t-il un $K$-tore $T$ de modèle minimal $\mathscr{T}$ tel que la fibre spéciale $\mathscr{T} \times_{\mathcal{O}} k$ soit isomorphe à $B$?*

Ici comme "modèle minimal" on pense, soit celui de Néron–Raynaud, soit le modèle standard; la réponse ne dépend pas du choix du modèle, sauf le cas de ramification sauvage, cf. Proposition A.

Dans telle généralité, les réponses aux questions 0.2 et 0.3 sont négatives. Nous présentons des obstructions qui empêchent de construire une variété abélienne (resp. un tore) ayant la réduction donnée.

THÉORÈME D (Propositions 3.8 et 5.12.). *Pour chaque $d$ il existe un entier $n_0 = n_0(d)$ tel que, si $k$ est un corps de caractéristique $> n_0$, alors, parmi les $k$-groupes unipotents de dimension $d$, seuls peuvent apparaître comme réduction du modèle minimal d'un $K$-tore algébrique* (*resp. d'une $K$-variété abélienne*) *de dimension $d$ ceux dont la composante neutre est isomorphe à $\boldsymbol{G}_a^d$.*

Donc il semble naturel de se poser une question suivante.

QUESTION 0.4. *Étant donné un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k$, quels $k$-groupes commutatifs affines $B$ peuvent apparaître comme réduction du modèle minimal d'un $K$-tore algébrique* (*resp. d'une $K$-variété abélienne*) *de dimension $d$?*

Pour les tores, une version un peu plus raffinée de cette question est étudiée au paragraphe 4 pour $d \leq 3$. La réponse est donnée par les théorèmes 4.2, 4.4 et 4.11.

Au paragraphe 5, on traite le cas des variétés abéliennes à l'aide d'uniformisation rigide.

Ça donne une réponse partielle à la question 0.2.

COROLLAIRE E (Corollaire 5.11.). *Si $k$ est un corps fini de caractéristique $p \leq 5$, alors il existe un corps $p$-adique $K$ à corps résiduel $k$ et une $K$-surface abélienne $S$ dont le modèle de Néron ait la réduction de type $\boldsymbol{W}_2$.*

Notons qu'il est important de distinguer des tores $T$ et des variétés abéliennes $A$ ayant réduction purement additive parmi ceux ayant réduction unipotente; *voir*, par exemple, [**5**] où l'on utilise ça dans le calcul des groupes formels associés à $T$ et à $A$.

Certains de ces résultats ont été annoncé dans la note [**10**].

*Notations*

$K =$ un corps $p$-adique $=$ une extension finie de $\boldsymbol{Q}_p$
$\mathcal{O} =$ l'anneau des entiers de $K$
$\wp =$ l'idéal maximal dans $\mathcal{O}$
$k = \mathcal{O}/\wp =$ le corps résiduel de $K$
$\boldsymbol{G}_m =$ le groupe multiplicatif
$\boldsymbol{G}_a =$ le groupe additif
$\boldsymbol{W}_n =$ le groupe des vecteurs de Witt de longueur $n$

$U =$ un $k$-groupe commutatif unipotent connexe
$T =$ un $K$-tore de dimension $d$
$L =$ le corps de déploiement de $T$
$\Pi = \mathrm{Gal}(L/K) =$ le groupe de Galois
$\hat{T} = \mathrm{Hom}(T \times_K L, \boldsymbol{G}_{m,L}) =$ le $\Pi$-module des caractères de $T$
$\varphi : \Pi \to GL(d, \boldsymbol{Z}) =$ la représentation de $\Pi$ correspondant au module $\hat{T}$
$G = \varphi(\Pi) =$ un sous-groupe fini dans $GL(d, \boldsymbol{Z})$
$\mathscr{T} =$ un $\mathcal{O}$-schéma en groupes tel que $\mathscr{T} \times_{\mathcal{O}} K \simeq T =$ un modèle entier de $T$
$\mathscr{T}^\circ =$ la composante neutre de $\mathscr{T}$
$\tilde{T} = \mathscr{T} \times_{\mathcal{O}} k =$ la fibre spéciale de $\mathscr{T} =$ la réduction de $T$
$\tilde{T}^\circ =$ la composante neutre de $\tilde{T}$
$A =$ une $K$-variété abélienne de dimension $d$
$\mathscr{A} =$ le modèle de Néron de $A$
$\mathscr{A}^\circ =$ la composante neutre de $\mathscr{A}$
$\tilde{A} = \mathscr{A} \times_{\mathcal{O}} k =$ la fibre spéciale de $\mathscr{A} =$ la réduction de $A$
$\tilde{A}^\circ =$ la composante neutre de $\tilde{A}$

## 1. Modèles entiers des tores algébriques.

Nous rappelons la définition du modèle de Néron–Raynaud.

Définition 1.1 [**3**, 10.1.1]. Un $\mathcal{O}$-schéma en groupes $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\mathrm{NR}}$, lisse et séparé, est dit modèle de Néron–Raynaud d'un $K$-tore algébrique $T$ si la fibre générique $\mathscr{T}_K$ est $K$-isomorphe à $T$ et si $\mathscr{T}$ possède la propriété de Néron: pour tout $\mathcal{O}$-schéma lisse $\mathscr{T}'$ et tout $K$-morphisme des fibres génériques $u_K : \mathscr{T}'_K \to \mathscr{T}_K$, il existe un $\mathcal{O}$-morphisme unique $u : \mathscr{T}' \to \mathscr{T}$ qui prolonge $u_K$.

Le modèle de Néron–Raynaud est unique, et c'est un $\mathcal{O}$-schéma localement de type fini. Pour construire le modèle $\mathscr{T}_{\mathrm{NR}}$, on procède comme suit. On construit d'abord le modèle $\mathscr{G}_m$ du groupe multiplicatif $\boldsymbol{G}_{m,K}$ en recollant $\boldsymbol{G}_{m,\mathcal{O}}$ avec les exemplaires $\pi^n \boldsymbol{G}_{m,\mathcal{O}}$, où $\pi$ est une uniformisante et où $n$ parcourt $\boldsymbol{Z}$. Pour un tore $T$ quelconque, soit $L/K$ une extension finie telle que $T \times_K L \simeq \boldsymbol{G}_{m,L}^d$. On plonge alors $T$ dans un tore quasi-trivial $S = R_{L/K} T_L = R_{L/K} \boldsymbol{G}_{m,L}^d$, où $R_{L/K}$ désigne le foncteur de Weil de restriction des scalaires. Soit $\mathscr{G}'_m$ le modèle de $\boldsymbol{G}_{m,L}^d$, et soit $\mathscr{T}'$ l'adhérence schématique de $T$ dans la restriction de Weil $R_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathscr{G}'_m$. On obtient le modèle $\mathscr{T}$ à partir de $\mathscr{T}'$ par le processus de "lissification en groupes" ("group smoothening", *voir* [**3**, Cor. 7.1.6 et Prop. 10.1.4]).

Voici une simplification de cette approche.

Définition 1.2. Avec les notations ci-dessus, soit $\mathscr{T}_V$ l'adhérence schématique de $T$ dans $R_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K} \mathbf{G}_{m,\mathcal{O}_L}^d$. On appelle $\mathscr{T}_V$ le modèle standard de $T$.

Le schéma $\mathcal{T}_V$ est réduit, fidèlement plat et de type fini, mais il n'est pas toujours lisse.

REMARQUE. Le modèle standard peut être défini en termes d'algèbres de Hopf comme en [**35**, Ch. 10], [**36**], ou bien par des équations explicites comme en [**13**]–[**16**]; *voir* [**9**] pour l'équivalence de ces définitions.

Nous introduisons la términologie nécessaire concernant la réduction des tores.

DÉFINITION 1.3. Soit $\mathcal{T}_V$ le modèle standard d'un $K$-tore $T$. La fibre spéciale $\tilde{T} = \mathcal{T}_V \times_{\mathcal{O}} k$ est appelée la réduction de $T$. Le tore $T$ est dit de bonne réduction si $T$ est un $k$-tore, de lisse réduction si $T$ est un $k$-groupe algébrique, et de réduction dégénérée si $\tilde{T}$ est un $k$-schéma non réduit.

Dans de cas de lisse réduction, nous avons le lien suivant entre le modèle standard et celui de Néron–Raynaud.

PROPOSITION 1.4. *Si un $K$-tore $T$ est déployé par une extension modérément ramifiée $L/K$, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}$-schémas $\mathcal{T}_{\mathrm{NR}}^{\circ} \simeq \mathcal{T}_V^{\circ}$.*

DÉMONSTRATION. Nous rappelons que si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes, on définit sa composante neutre comme le sous-schéma ouvert $\mathcal{G}^{\circ}$ de $\mathcal{G}$ obtenu par l'union de toutes les composantes neutres des fibres $\mathcal{G}_{\wp}$ au delà de $\wp \in \mathcal{O}$ (*voir* [**3**, p. 154]). Pour les modèles de Néron–Raynaud des tores déployés, on a $(\mathcal{G}_m^d)^{\circ} \simeq \mathbf{G}_{m,\mathcal{O}}^d = \operatorname{Spec} \mathcal{O}[x_1, \dots, x_d, x_1^{-1}, \dots x_d^{-1}]$. Si $\mathcal{R}$ est le modèle de Néron–Raynaud d'un tore quasi-trivial $R_{L/K}\boldsymbol{G}_m$, on a $\mathcal{R}^{\circ} = R_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}\boldsymbol{G}_m$ (*voir* [**17**, 3.1]). On obtient donc $\mathcal{T}_{\mathrm{NR}}^{\circ}$ comme la composante neutre de la lissification de l'adhérence schématique de $T$ dans $R_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}\boldsymbol{G}_m^d$ qui est isomorphe à $\mathcal{T}_V$ (*voir* 1.1, 1.2). Comme $L/K$ est modérément ramifiée, $\mathcal{T}_V$ est déja lisse (pour démontrer ça, il faut répéter mot-à-mot la démonstration du théorème 4.1 de [**6**] en remplaçant les variétés abéliennes par les tores et les modèles de Néron par les modèles de Néron–Raynaud). □

REMARQUE. La proposition 1.4 partiellement justifie la définition 1.3 où nous avons pris le modèle standard pour définir la réduction d'un tore.

Nous terminons ce paragraphe par un lemme simple qui sera utilisé dans la suite de façon systématique.

LEMMA 1.5. *Soient $T_1, T_2$ des tores définis sur un corps $p$-adique $K$, et soit $\alpha : T_1 \to T_2$ une $K$-isogénie de degré premier à $p$. Alors $\alpha$ induit un $k$-isomorphisme des parties unipotentes des composantes neutres des fibres spéciales des modèles de Néron–Raynaud.*

DÉMONSTRATION. Nous allons utiliser les résultats de [**3**, Section 7.3]. Il faut remarquer qu'ils sont énoncés sous l'hypothèse que le modèle entier est de type fini. Quand même, les démonstrations ne dépendent que de quelques lemmes de [**3**, Ch. 2] qui restent vrais sous l'hypothèse plus faible que le schéma sous considération est localement de type fini ce qui est le cas pour les tores.

Alors, d'après [**3**, 7.3.6], $\alpha$ induit une $\mathcal{O}$-isogénie des modèles entiers $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$, donc une $k$-isogénie des fibres spéciales et de leurs composantes neutres. Soit $\tilde{\alpha} : U_1 \to U_2$ l'isogénie des parties unipotentes de $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ induite par $\alpha$. D'après [**28**, VI.6, prop. 6], son noyau est contenu dans $U_1(k)$ car $\tilde{\alpha}$ est séparable et $U_1$ et $U_2$ sont commutatifs. L'ordre de $U_1(k)$ est une puissance de $p$, donc égal à 1, car le degré de $\tilde{\alpha}$ ne divise pas $p$, c'est-à-dire $\tilde{\alpha}$ est en fait $k$-isomorphisme. □

## 2. Réduction des tores déployés par une extension modérément ramifiée.

Voici d'abord une formule explicite pour la réduction d'un tore normique, ce qui généralise [**36**, §4].

Soit $F/K$ une extension finie (non nécessairement normale), et soit $T = R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m$, le tore normique défini comme le noyau de l'application norme $N : R_{F/K}\boldsymbol{G}_m \to \boldsymbol{G}_{m,K}$. Nous voulons calculer la réduction de $T$ en nous bornant au cas de lisse réduction. D'après [**3**, 7.2.1(ii)], le modèle de Néron–Raynaud est compatible avec le changement de base étale, et on peut donc se restreindre au cas totalement ramifié.

THÉORÈME 2.1. *Soit $F/K$ une extension totalement ramifiée de degré $m = d+1$ premier à $p$. Soit $T = R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m$ le tore normique, et soit $\tilde{T}$ sa réduction. Alors $\tilde{T}^\circ$ est isomorphe au produit*

$$\prod_{\substack{1 \le i \le d \\ (i,p)=1}} \boldsymbol{W}_{r_i,k},$$

*où $r_i = \min\{r : p^r \ge m/i\}$, et où $\boldsymbol{W}_n$ est le groupe des vecteurs de Witt de longueur $n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $T_1 = R_{F/K}\boldsymbol{G}_m/\boldsymbol{G}_{m,K}$. On a une isogénie de $K$-groupes $\alpha : T_1 \to T$ donnée (au niveau de $K$-points) par

$$x(\operatorname{mod} K^*) \mapsto x^m/N_{F/K}(x),$$

où $x \in F^*$. Comme le degré de $\alpha$ est premier à $p$, on a un $k$-isomorphisme des parties unipotentes de $\tilde{T}^\circ$ et $\tilde{T}_1^\circ$ (*voir* lemme 1.5). Le modèle de Néron–Raynaud de $T_1$ est $\mathcal{T}_1 = R_{\mathcal{O}_F/\mathcal{O}_K}\mathcal{G}'_m/\mathcal{G}_m$, où $\mathcal{G}_m$ est le modèle de $\boldsymbol{G}_{m,K}, \mathcal{G}'_m$ est le modèle de $\boldsymbol{G}_{m,F}$ (*voir* [**3**, 10.1.11]). L'extension $F/K$ étant totalement ramifiée, donc donnée par un polynôme d'Eisenstein, on a $\mathcal{O}_F \cong \mathcal{O}_K[X]/(X^m + \pi_K \cdot g(X))$, où $\pi_K$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_K$ et $\deg(g(X)) < m$. Donc l'anneau $R = \mathcal{O}_F/\pi_K\mathcal{O}_F$ est isomorphe à $k[X]/(X^m)$, et la fibre spéciale $\tilde{T}_1$ s'identifie à $U^{(m)}$, groupe des unités de $R$ congrues à 1 modulo $\pi_F$, où $\pi_F$ est une uniformisante de $\mathcal{O}_F$. L'exponentielle d'Artin–Hasse définit un isomorphisme de $U^{(m)}$ sur un produit de groupes de Witt (*voir* [**28**, Ch. V, prop. 9]). □

REMARQUE. Sous les hypothèses du théorème, le modèle standard $\mathcal{T}_V$ du tore $T = R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m$ a lisse réduction, même si $L$, la clôture normale de $F$, est sauvagement ramifiée sur $K$ (*voir* [**36**, §4]). Bien entendu, on a la même formule pour la réduction $\tilde{T}^\circ_V$. De plus, comme on a noté dans [**12**], on peut utiliser cette même formule dans certains cas où l'extension $F/K$ est sauvagement ramifiée, par exemple, si $F/K$ est cyclique de degré $p$; en fait, dans ce cas le tore normique $T = R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m$ est isomorphe au tore dual $T_1 = R_{F/K}\boldsymbol{G}_m/\boldsymbol{G}_{m,K}$ pour lequel la réduction de $\mathcal{T}_1$, suivant l'argument du théorème 2.1, est donnée par la formule ci-dessus.

L'étude de la réduction d'un tore arbitraire se ramène au cas des tores normiques, ce qui nous permet de répondre à une question posée dans [**17**]: déterminer tous les groupes unipotents qui peuvent apparaître dans la réduction $\tilde{T}^\circ$ d'un $K$-tore $T$. Quant à la partie torique de $\tilde{T}^\circ$, elle a déjà été déterminée dans [**17**].

THÉORÈME 2.2. *Soit $T$ un $K$-tore de dimension $d$ dont le corps de déploiement $L$ soit modérément ramifié sur $K$. La partie unipotente de $\tilde{T}^\circ$ est alors $k$-isomorphe à un produit de groupes de Witt $\boldsymbol{W}_{n_i,k}$ qu'on peut déterminer explicitement.*

DÉMONSTRATION. Sans restreindre généralité, nous supposons $L/K$ totalement ramifiée. Comme $L/K$ est modérément ramifiée, $p$ ne divise pas son indice de ramification, ni donc son degré. Par un théorème d'Ono (*voir* [**18**, 1.5.1]), il existe une isogénie

$$\alpha : T^m \times \prod_i (R_{K_i/K}\boldsymbol{G}_m)^{m_i} \to \prod_i (R_{K_i/K}\mathbf{G}_m)^{n_i},$$

où $K_i$ parcourt toutes les sous-extensions de $L$, et où les nombres entiers non negatifs $m, m_i, n_i$ sont uniquement déterminés. De plus, on peut construire $\alpha$ de telle façon que $p$ ne divisait pas son degré (*voir* [**18**, 1.3.3], [**17**, 3.3]). Vu le lemme 1.5, on obtient un isomorphisme des parties unipotentes des composantes neutres des réductions des modèles entiers:

$$\alpha_u : U^m \times U_1 \simeq U_2,$$

où $U$ désigne la partie unipotente de $\tilde{T}^\circ$, et où les $k$-groupes unipotents $U_1$ et $U_2$ sont donnés par les formules explicites du théorème 2.1. Mais $U$ est isogène au produit de groupes de Witt $\boldsymbol{W}_{d_i}$, où les nombres $d_i$ sont uniquement déterminés (*voir* [**28**, Ch. VII, §10, th. 1]; ce théorème est énoncé pour $k$ algébriquement clos mais la démonstration vaut aussi pour $k$ parfait), ce qui donne la partie unipotente de $\tilde{T}^\circ$ à $k$-isomorphisme près. □

Remarque. Une tentative de faire le calcul des nombres $r_i$ encore plus explicite dans le cas particulier d'un tore déployé par une extension cyclique qui a été énoncée dans [**10**, théorème 2.3], est fausse; en effet ce théorème contredit le théorème 2.1 ci-dessus pour les tores normiques. Par exemple, si $p > m$, alors les nombres $r_i$ sont tous égals à 1; dans le théorème 2.3 de [**10**] ces nombres apparaissent comme les degrés des caractères $\boldsymbol{F}_p$-irréductibles de $\boldsymbol{Z}/m$ parmi lesquels il y a ceux qui sont bien différents de 1 (disons, pour $m = 4$, $p = 5$).

## 3. Réduction unipotente.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à un "problème inverse" de la construction des tores ayant la réduction donnée (*voir* questions 0.3 et 0.4). Les modèles minimaux utilisés sont ceux de Néron–Raynaud. Notons $\tilde{T}^\circ$ la composante neutre de la fibre spéciale de $\mathcal{T}_{\mathrm{NR}}$. On peut se poser une question suivante.

Question 3.1. *Étant donnés un corps p-adique K de corps résiduel k, et un k-groupe affine commutatif connexe B, existe-t-il un K-tore T tel que $\tilde{T}^\circ$ soit isomorphe à B?*

Remarque. En général, on a la suite exacte

$$0 \to \tilde{T}^\circ \to \tilde{T} \to \Phi(T) \to 0,$$

où $\Phi(T)$ est le groupe des composantes connexes; *voir* [**38**] pour l'étude de ce groupe, et [**12**] pour les problèmes liés au scindage de la suite exacte ci-dessus. Nous nous limitons au cas connexe.

On peut écrire $B$ comme un produit $S \times U$, où $S$ est un $k$-tore et où $U$ est un $k$-groupe unipotent. (Dans toute la suite, "unipotent" = "unipotent commutatif connexe"). Pour la partie torique, la réponse à la question 3.1 est positive et facile.

Proposition 3.2. *Étant donné un k-tore S, il existe un K-tore T tel que $\tilde{T} \simeq S$.*

Démonstration. Se donner un $K$-tore algébrique $T$ de dimension $d$ équivaut à se donner un triplet $(K, L, G)$, où $K$ est le corps de définition, où $L$ est le corps de déploiement et où $G \subset GL(d, \boldsymbol{Z})$ est un sous-groupe fini correspondant au module galoisien $\hat{T} = \mathrm{Hom}(T_L, \boldsymbol{G}_{m,L})$ (*voir* [**34**, ch. 4, §9]); ici $G$ est défini à conjugaison près.

Comme $k$ est un corps fini, on a $S = (k, l, G)$, où $l/k$ est une extension cyclique et où $G \subset GL(d, \boldsymbol{Z})$ est un sous-groupe cyclique. On choisit une extension cyclique non ramifiée $L/K$ telle que $l$ et $k$ soient les corps résiduels. Alors le tore $T = (K, L, G)$ est un tore cherché parce que sa réduction est isomorphe à $S$ (*voir* [**17**, 1.1], [**36**, prop. 2]). $\square$

Le fait suivant permet de ramener le cas général à celui de la réduction purement unipotente.

PROPOSITION 3.3. *Soit $B = S \times U$ le produit d'un $k$-tore $S$ par un $k$-groupe unipotent $U$. S'il existe un $K$-tore $T$ tel que $\tilde{T}^\circ$ soit isomorphe à $B$, alors il existe un $K$-tore $T_1$ tel que $\tilde{T}_1^\circ$ soit isomorphe à $U$.*

DÉMONSTRATION. Notons $T_{\mathrm{nr}}$ le plus grand sous-tore de $T$ ayant bonne réduction; son module des caractères est défini par $\hat{T}_{\mathrm{nr}} = \mathrm{im}[\hat{T} \xrightarrow{tr} \hat{T}^I]$, où $I \subset G$ est le sous-groupe d'inértie, où $\hat{T}^I$ est le module d'invariants et où $tr$ est l'application donnée par

$$tr(\hat{T}) = \left(\sum_{\sigma \in I} \sigma\right)\hat{T}.$$

On a $\tilde{T}_{\mathrm{nr}}^\circ \simeq S$ (*voir* [**17**, th. 1.3]). Pour $T_1 = T/T_{\mathrm{nr}}$, on a donc $\tilde{T}_1^\circ \simeq U$. $\square$

Dans toute la suite, nous considérons le cas de la réduction purement unipotente. Nous allons présenter des spécialisations de la question 3.1.

QUESTION 3.4. *Étant donnés un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k$, et un $k$-groupe unipotent $U$, existe-t-il un $K$-tore $T$ tel que $\tilde{T}^\circ$ soit isomorphe à $U$?*

Voici quelques obstructions évidentes à une réponse positive.

Premièrement, pour un tore $T = (K, L, G)$, on peut rencontrer une situation où toute extension $L/K$ à groupe de Galois $G$ est non ramifiée, ce qui previent à $T$ d'avoir réduction unipotente. Par exemple, c'est le cas pour $K = \boldsymbol{Q}_2$ et $G = \boldsymbol{Z}/3$, le groupe cyclique d'ordre 3. Cette remarque montre qu'il est raisonnable de modifier la question 3.4.

QUESTION 3.5. *Étant donnés un corps fini $k$ de caractéristique $p$, et un $k$-groupe unipotent $U$, existe-t-il un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k'$, une extension finie de $k$, et un $K$-tore $T$ tel que $\tilde{T}^\circ$ soit isomorphe à $U \times_k k'$?*

Même sous telle forme, il y a une obstruction à une réponse positive, et cette deuxième obstruction est plus sérieuse.

THÉORÈME 3.6 [**17**, th. 0.1]. *Soit $e$ l'indice de ramification de $L/K$, et soit $p$ la caractéristique de $k$. Si $p > e$, pour tout $K$-tore $T$, qui se déploie sur $L$, la partie unipotente de $\tilde{T}^\circ$ est isomorphe au groupe additif $\mathbf{G}_a^n$.*

Ce théorème montre que pour $k$ donné, dans les dimensions $d$ petites par rapport à la caractéristique de $k$, la réponse à la question 3.5 est presque toujours négative.

Définition 3.7. Soit $k$ un corps fini. Un $k$-groupe unipotent $U$ est dit $t$-admissible s'il existe un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k$, et un $K$-tore $T$ tel que $\tilde{T}^\circ$ soit isomorphe à $U$.

Proposition 3.8. *Pour chaque d il existe un entier $n_0 = n_0(d)$ tel que, si k est un corps de caractéristique $> n_0$, alors, parmi les k-groupes unipotents de dimension d seuls soient t-admissibles ceux qui sont isomorphes à $\boldsymbol{G}_a^d$.*

Démonstration. Soit $n_0 = n_0(d)$ l'ordre maximal d'un sous-groupe fini de $GL(d, \boldsymbol{Z})$. Alors pour tout corps $p$-adique $K$ à corps résiduel $k$, et tout $K$-tore $T$ de dimension $d$ à corps de déploiement $L$, on peut borner l'indice de ramification de $L/K$:

$$e \leq [L : K] = |G| \leq n_0 < p,$$

et le théorème 3.6 donne de résultat. □

On doit donc modifier le problème inverse dans ce cas.

Question 3.9. *Étant donnés un corps fini k, et un entier d, quels sont les k-groupes unipotents B de dimension d qui sont t-admissibles*?

Sur un corps $k$ parfait, tout groupe unipotent est $k$-isogène à un produit de groupes de Witt $\boldsymbol{W}_d$; il semble donc naturel de restreindre cette question.

Question 3.10. *Le groupe des vecteurs de Witt $\boldsymbol{W}_{d,k}$, est-il t-admissible*?

Remarque. Il serait intéressant d'obtenir des bornes plus explicites que dans la proposition 3.8; dans cette direction, on peut utiliser l'uniformisation rigide et la proposition 5.12 ci-dessous.

## 4. Tores de petites dimensions à réduction unipotente.

Dans ce paragraphe, nous étudions le cas $d \leq 3$. Nous nous concentrons à la question 3.10, et nous allons considérer également les cas de ramification modérée et de ramification sauvage.

Définition 4.1. Soit $k$ un corps fini. Un $k$-groupe unipotent $U$ est dit $v$-admissible s'il existe un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k$, et un $K$-tore $T$ déployé par une extension modérément ramifié $L$ tel que $T_{\mathrm{NR}}^\circ$ soit isomorphe à $U$.

Remarque. Bien entendu, si $U$ est v-admissible, alors $\tilde{T}_V^\circ$ est aussi isomorphe à $U$ vu la proposition 1.4.

Commençons par le cas $d = 1$.

Théorème 4.2. *Soit $k$ un corps fini de caractéristique $p$.*

a) *Le groupe additif $\boldsymbol{G}_{a,k}$ est t-admissible.*

b) *Le groupe additif $\boldsymbol{G}_{a,k}$ est v-admissible si et seulement si $p \neq 2$.*

Démonstration. Les seuls $K$-tores de dimension 1 sont $S = \boldsymbol{G}_{m,K}$ et $T = R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m$, où $F/K$ est une extension quadratique (*voir* [**34**, 4.73]). On a $\tilde{S}_V = \boldsymbol{G}_{m,k}$; si $F/K$ est non ramifiée, alors $\tilde{T}_V = R^1_{f/k}\boldsymbol{G}_m$, où $f$ est le corps résiduel de $F$; enfin, $\tilde{T}_V \simeq \{\pm 1\} \times \boldsymbol{G}_{a,k}$ si $F/K$ est ramifiée et $p \neq 2$ (*voir* théorème 2.1), et $\tilde{T}_V$ est un schéma non réduit pour $p = 2$ (*voir* [**6**], [**36**]). Dans ce dernier cas, on peut obtenir le modèle de Néron–Raynaud $\mathcal{T}_{\mathrm{NR}}$ en éclatant $\mathcal{T}_V$ (*voir* [**6**, 4.3]); pour sa réduction, on a $\tilde{T}^\circ_{\mathrm{NR}} \simeq \boldsymbol{G}_{a,k}$ (*voir* [**17**, 3.2]). $\square$

Corollaire 4.3. *Le groupe additif $\boldsymbol{G}^d_{a,k}$ est t-admissible.*

Démonstration. Prenons $T = (R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m)^d$. $\square$

Passons au cas $d = 2$.

Théorème 4.4. *Soit $k$ un corps fini de caractéristique $p$.*

a) *Le groupe additif $\boldsymbol{G}^2_{a,k}$ est t-admissible.*

b) *Le groupe additif $\boldsymbol{G}^2_{a,k}$ est v-admissible si et seulement si $p \neq 2$.*

c) *Le groupe des vecteurs de Witt $\boldsymbol{W}_{2,k}$ est t-admissible si et seulement si $p \leq 5$.*

d) *Le groupe des vecteurs de Witt $\boldsymbol{W}_{2,k}$ est v-admissible si et seulement si, soit $p = 3$ ou 5, soit $p = 2$ et la cardinalité de $k$ est égale à $2^s$ avec $s$ pair.*

Démonstration. Nous allons utiliser la description complète des tores de dimension 2 donnée par Voskresenskiĭ [**33**], avec les corrections de Seligman [**27**]. Nous allons présenter non seulement la liste des sous-groupes finis dans $GL(2, \boldsymbol{Z})$ (à conjugaison près) comme dans [**33**], mais aussi une description explicite des tores correspondants. Nous avons besoin des notations supplémentaires.

$K =$ un corps de base

$T =$ un $K$-tore

$L =$ le corps de déploiement de $T$

$F/K =$ une extension quadratique

$C/K =$ une extension cubique abélienne

$Q/K =$ une extension cyclique de degré 4

$S/K =$ une extension cubique non abélienne

$D/K =$ une extension de degré 4 non abélienne à clôture galoisienne diédrale

$M/K =$ une extension quadratique linéairement disjointe de $L$

$R^1_{M/K}T = \ker[R_{M/K}T_M \xrightarrow{N} T]$, où $N(x) = xx^\sigma, \sigma$ engendrant $\mathrm{Gal}(M/K)$

Nous voulons décrire les tores "indécomposables" de dimension 2, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas isomorphes à un produit des tores de dimension 1.

Proposition 4.5. *Tout $K$-tore indécomposable de dimension 2 est isomorphe à l'un des suivants*:

- $T_1 = R_{F/K}\boldsymbol{G}_m$
- $T_2 = R^1_{M/K}T_1$
- $T_3 = R^1_{C/K}\boldsymbol{G}_m$
- $T_4 = R^1_{M/K}T_3$
- $T_5 = R^1_{S/K}\boldsymbol{G}_m$
- $T_6 = R_{S/K}\boldsymbol{G}_m/\boldsymbol{G}_{m,K}$
- $T_7 = R^1_{M/K}T_5$
- $T_8 = \ker[R_{Q/K}\boldsymbol{G}_m \xrightarrow{N} R_{Q_1/K}\boldsymbol{G}_m]$, *où* $N(x) = xx^{\sigma^2}$ *avec* $\sigma$ *engendrant* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *et* $Q_1 = Q^{\sigma^2}$ *le corps fixe*
- $T_9 = \ker[R_{D/K}\boldsymbol{G}_m \xrightarrow{N} R_{D_1/K}\boldsymbol{G}_m]$, *où* $N(x) = xx^{\sigma^2}$ *avec* $\sigma$ *un élément d'ordre* 4 *dans* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *et* $D_1 = D^{\sigma^2}$ *le corps fixe*

Démonstration. Nous utilisons la liste des sous-groupes finis dans $GL(2,\boldsymbol{Z})$ et une observation générale suivante.

Lemme 4.6. *Soit $T = (K, L, G)$ un tore de dimension $d$ défini sur $k$ et déployé par $L$, et soit $G \subset \mathrm{GL}(d,\boldsymbol{Z})$ un sous-groupe fini correspondant au module galoisien $\hat{T} = \mathrm{Hom}(T_L, \boldsymbol{G}_{m,L})$. Soit $M/K$ une extension quadratique linéairement disjointe de $L$. Soit*

$$R^1_{M/K}T = \ker[R_{M/K}T_M \xrightarrow{N} T].$$

*Alors on peut écrire $R^1_{M/K}T = (K, LM, G_1)$, où $G_1 = G \times \{\pm I_d\}$, et où $I_d$ est la matrice unité de dimension $d$. De plus, on a un isomorphisme $R^1_{M/K}T \simeq R_{M/K}T/T$.*

Démonstration. On a $G_1 = G \times \boldsymbol{Z}/2$, le facteur $\boldsymbol{Z}/2$ correspond à $\mathrm{Gal}(M/K)$, notons $\sigma$ son générateur. Par la définition de $T' = R^1_{M/K}T$, on a une suite exacte de $G_1$-modules:

$$0 \to \hat{T} \xrightarrow{\alpha} \hat{T} \oplus \boldsymbol{Z}[G_1/G] \xrightarrow{\beta} \hat{T}' \to 0,$$

où $\alpha(m) = m \otimes 1 + m \otimes \sigma$. Soit $\{e_1, \ldots, e_d\}$ une base de $\hat{T}$. Prenons

$$\{f_1, \ldots, f_d\} = \{\beta(e_1 \otimes 1), \ldots, \beta(e_d \otimes 1)\}$$

pour une base de $\hat{T}'$. Comme $\sigma$ permute $m \otimes 1$ et $m \otimes \sigma$, on a $\sigma f_i = -f_i$, d'où la première assertion du lemme.

Soit $T'' = R_{M/K}T/T$. On a une suite exacte

$$0 \to \hat{T}'' \to \hat{T} \otimes \boldsymbol{Z}[G_1/G] \xrightarrow{\gamma} \hat{T} \to 0,$$

où $\gamma(e_i \otimes 1) = \gamma(e_i \otimes \sigma) = e_i$. Donc on peut prendre

$$\{g_1, \dots, g_d\} = \{e_1 \otimes 1 - e_1 \otimes \sigma, \dots, e_d \otimes 1 - e_d \otimes \sigma\}$$

pour une base de $\hat{T}''$ et voir que l'action de $G_1$ sur $\hat{T}''$ coïncide avec son action sur $\hat{T}'$, d'où la dernière assertion du lemme. $\square$

LEMME 4.7 [33], [27]. *Il y a* 9 *sous-groupes finis indécomposables dans* $GL(2, \boldsymbol{Z})$ (*à conjugaison près*):

$$G_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_7 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_8 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$G_9 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \qquad \square$$

Ce lemme composé avec la définition d'un tore normique et le lemme 4.6, donne immédiatement les présentations pour $T_1$–$T_3$, $T_5$ dans la liste de la proposition 4.5.

Pour $T_4$, il faut remarquer que l'on peut présenter $G_4$ sous la forme équivalente:

$$G_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Pour $T_6$, nous rappelons que par définition, son module des caractères s'inclut dans une suite exacte

$$0 \to \hat{T}_6 \to \boldsymbol{Z}[G/H] \xrightarrow{\varepsilon} \boldsymbol{Z} \to 0,$$

où $G = \langle \sigma, \tau : \sigma^3 = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle \simeq S_3$, $H = \langle \tau \rangle$, et où $\varepsilon$ est l'homomorphisme d'augmentation, $\varepsilon(\sum a_i e_i) = \sum a_i$. On peut donc prendre $\{\sigma - 1, \sigma^2 - 1\} = \{g_1, g_2\}$ comme une base de $\hat{T}_6$. On a

$$\begin{array}{ll} \sigma g_1 = g_2 - g_1 & \tau g_1 = g_2 \\ \sigma g_2 = -g_1 & \tau g_2 = g_1 \end{array}.$$

Les formules pour $G_6$ donnent

$$\begin{array}{ll} \sigma f_1 = f_1 & \tau f_1 = -f_2 \\ \sigma f_2 = -f_1 - f_2 & \tau f_2 = -f_1 \end{array}.$$

En posant $g_1 = -f_2, g_2 = f_1$, nous établissons la présentation requise. Pour $T_7$, présentons $G_7$ sous la forme équivalente

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

et utilisons le lemme 4.6.

De la définition de $T_8$, on a une suite exacte

$$0 \to \boldsymbol{Z}[G/H] \to \boldsymbol{Z}[G] \to \hat{T}_8 \to 0,$$

où $G = \langle \sigma \rangle$ est le groupe cyclique d'ordre 4, $H$ est son sous-groupe d'ordre 2, et où $\boldsymbol{Z}[G/H]$ s'inclut dans $\boldsymbol{Z}[G]$ comme le sous-module engendré par $1 + \sigma^2$ et $\sigma + \sigma^3$. Ça donne la matrice requise pour le générateur de $G_8$.

Pour $T_9$, on utilise un raisonnement analogue. Dans la suite exacte

$$0 \to \boldsymbol{Z}[G/H_1] \to \boldsymbol{Z}[G/H] \to \hat{T}_9 \to 0,$$

on a $G = \langle \sigma, \tau : \sigma^4 = \tau^2 = (\sigma\tau)^2 = 1 \rangle$, $H = \langle \tau \rangle$, $H_1 = \langle \sigma^2, \tau \rangle$, et $\boldsymbol{Z}[G/H_1]$ s'inclut dans $\boldsymbol{Z}[G/H]$ comme sous-module engendré par $H + \sigma^2 H$ et $\sigma H + \sigma^3 H$. Ça donne la représentation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En prenant $\sigma$ et $\tau\sigma$ comme générateurs du groupe diédral, nous obtenons la représentation requise pour $G_9$.

La proposition 4.5 est démontrée. $\square$

Ayant ceci, passons à la démonstration du théorème 4.4.

a) L'assertion n'est qu'un cas particulier du corollaire 4.3.

b) Si $p \neq 2$, on déduit le résultat du théorème 4.2(b) en prenant $T = (R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m)^2$ pour $F/K$ quadratique ramifiée.

Soit maintenant $p = 2$ et supposons qu'il existe un $K$-tore $T$ de dimension 2 déployé par une extension modérément ramifiée $L/K$ tel que $\tilde{T}^\circ \simeq \boldsymbol{G}_a^2$. Comme d'habitude, on peut supposer $L/K$ totalement ramifiée. Par le théorème 4.2, on peut supposer $T$ indécomposable. La liste de tels tores est donnée par la proposition 4.5. Comme l'indice de ramification $e(L/K)$ doit être impair et égale à $[L : K]$, le seul candidat est $T_3$. Le théorème 2.1 donne $\tilde{T}_3^\circ \simeq \boldsymbol{W}_2$. L'assertion b) est démontrée.

Afin d'obtenir c) et d), nous montrons d'abord que pour $p = 3$ et $p = 5$, il existe $T_i$ déployé par une extension modérément ramifiée tel que $\tilde{T}_i^\circ \simeq \boldsymbol{W}_2$, et que pour $p \geq 7$, on a toujours la réduction purement additive; on s'occupera au cas $p = 2$ séparément.

Considérons le cas $p = 3$ et $T = T_2$.

LEMME 4.8. *Soient $L/K$ et $M/K$ deux extensions quadratiques ramifiées d'un corps 3-adique $K$. Pour le tore $T = T_2 = R^1_{M/K}(R_{L/K}\boldsymbol{G}_m)$, on a $\tilde{T}^\circ \simeq \boldsymbol{W}_2$.*

DÉMONSTRATION. On a une isogénie de degré 2

$$\alpha : R_{ML/K}\boldsymbol{G}_m \to R_{L/K}\boldsymbol{G}_m \times T$$

définie par

$$x \mapsto (N(x), x^2/N(x)),$$

où $N(x) = xx^\sigma$ avec $\sigma$ engendrant $\mathrm{Gal}(ML/L)$. Vu le lemme 1.5, ça donne un isomorphisme des parties unipotentes des composantes neutres des fibres spéciales

$$\tilde{\alpha} : \boldsymbol{W}_2 \times \boldsymbol{G}_a \to \boldsymbol{G}_a \times \tilde{T}^\circ,$$

d'où $\tilde{T}^\circ \simeq \boldsymbol{W}_2$. □

Considérons le cas $p = 5$ et $T = T_7$.

LEMME 4.9. *Soit $K$ un corps 5-adique qui admette une extension cubique non normale $S$ et une extension quadratique $M$, toutes les deux étant ramifiées. Alors pour $T = T_7 = R^1_{M/K}(R^1_{S/K}\boldsymbol{G}_m)$, on a $\tilde{T}^\circ \simeq \boldsymbol{W}_2$.*

DÉMONSTRATION. On a une isogénie de degré 2

$$R_{M/K}(R^1_{S/K}\boldsymbol{G}_m) \to R^1_{S/K}\boldsymbol{G}_m \times T,$$

définie par

$$x \mapsto (N_{M/K}(x), x^2/N_{M/K}(x)),$$

et une isogénie de degré 3

$$R_{S/K}\boldsymbol{G}_m \to \boldsymbol{G}_m \times R^1_{S/K}\boldsymbol{G}_m,$$

définie par

$$x \mapsto (N_{S/K}(x), x^3/N_{S/K}(x)),$$

d'où une isogénie de degré 6 (donc premier à 5)

$$R_{MS/K}\boldsymbol{G}_m \times \boldsymbol{G}_m \to R_{M/K}\boldsymbol{G}_m \times R_{S/K}\boldsymbol{G}_m \times T.$$

D'après le lemme 1.5, ça donne un isomorphisme des parties unipotentes des réductions que nous calculons à l'aide du théorème 2.1:

$$\boldsymbol{W}_2 \times \boldsymbol{G}_a^3 \simeq \boldsymbol{G}_a \times \boldsymbol{G}_a^2 \times \tilde{T}^\circ,$$

d'où le résultat du lemme. □

Soit maintenant $p = 2$. Prenons $T = T_5 = R^1_{S/K}\boldsymbol{G}_m$ où $S/K$ est une extension cubique non abélienne ramifiée. Malgré que $L$, la clôture normale de $S$, étant de degré 6 sur $K$, est sauvagement ramifiée, on peut utiliser le théorème 2.1 (*voir* la remarque après ce théorème). Nous obtenons $\tilde{T}_5^\circ \simeq \boldsymbol{W}_2$, ce qui prouve c).

En ce qui concerne d), il y a une petite subtilité. Nous ne pouvons pas utiliser le tore $T_5$ car le corps de déploiement est sauvagement ramifié. Il faut donc utiliser $T_3 = R^1_{C/K}\boldsymbol{G}_m$, où $C/K$ est une extension cubique abélienne ramifiée. Comme nous avons remarqué dans la preuve de b), $T_3$ est le seul candidat, et comme $\tilde{T}_3^\circ \simeq \boldsymbol{W}_2$, on réussit une fois que l'on construit une extension $C/K$ telle que $k$ soit le corps résiduel de $K$. Mais c'est possible si est seulement si $K$ (et donc $k$) contient les racines cubiques de l'unité, en d'autres termes, si est seulement si 3 divise $q - 1$, où $q$ est la cardinalité de $k$. La dernière condition est équivalent à la condition $q$ est une puissance paire de 2, ce qui démontre d).

L'ordre d'un sous-groupe fini dans $GL(2, \boldsymbol{Z})$ divise 24, donc pour $p > 3$ tout tore de dimension 2 est déployé par une extension modérément ramifiée. Il suit qu'afin d'établir c) et d), il ne reste qu'à démontrer que pour $p > 5$, aucun tore de dimension 2 déployé par une extension modérément ramifiée n'admet la réduction du type $\boldsymbol{W}_2$.

Considérons d'abord les tores $T_7$ et $T_9$ correspondant aux sous-groupes finis maximaux dans $GL(2, \boldsymbol{Z})$.

LEMME 4.10. *Lorsque $p > 5$ et $T = T_7$ ou $T_9$, on a $\tilde{T}^\circ \simeq \boldsymbol{G}_a^2$.*

DÉMONSTRATION. Pour $T = T_7$, le résultat suit de l'isogénie établie dans la démonstration du lemme précédent. Pour $T = T_9$, on a une isogénie de degré 2

$$R_{D/K}\boldsymbol{G}_m \to R_{D_1/K}\boldsymbol{G}_m \times T$$

définie par

$$x \mapsto (N_{D/D_1}(x), x^2/N_{D/D_1}(x)),$$

d'où, pour $p > 3$, on peut de nouveau utiliser le lemme 1.5 et le théorème 2.1 pour obtenir un isomorphisme

$$\boldsymbol{G}_a^3 \simeq \boldsymbol{G}_a \times \tilde{T}^\circ,$$

ce qui donne $\tilde{T}^\circ \simeq \boldsymbol{G}_a^2$. □

REMARQUE. Dans les démonstrations des lemmes précédents, nous utilisions de façon systématique des isogénies définies explicitement sur les $K$-points des tores sous considération. Si l'on préfère penser d'une façon plus algébrique, on peut démontrer que $T_1$ et $T_2$ sont isogènes en exhibant un isomorphisme des modules $\hat{T}_1 \otimes \boldsymbol{Q}$ et $\hat{T}_2 \otimes \boldsymbol{Q}$. Par exemple, dans le lemme 4.10, on peut établir l'isogénie cherchée comme suit. On revient à la démonstration de la proposition 4.5. Considérons la suite exacte de $\boldsymbol{Q}[G]$-modules:

$$0 \to \boldsymbol{Q}[G/H_1] \to \boldsymbol{Q}[G/H] \to \hat{T}_9 \otimes \boldsymbol{Q} \to 0.$$

Alors le choix d'une base $\{H + \sigma^2 H, \sigma H + \sigma^3 H, H - \sigma^2 H, \sigma H - \sigma^3 H\}$ de $\boldsymbol{Q}[G/H]$ donne un scindage

$$\boldsymbol{Q}[G/H] \simeq (\hat{T}_9 \otimes \boldsymbol{Q}) \oplus \boldsymbol{Q}[G/H_1],$$

d'où l'isogénie cherchée.

Pour achever la démonstration du théorème 4.4, il ne reste qu'à remarquer que lorsque $p > 5$, pour n'importe quel tore $T = T_j$ $(j = 1, \ldots, 9)$, on a une isogénie du théorème 2.2:

$$T^m \times \prod_i (R_{K_i/K}\boldsymbol{G}_m)^{m_i} \to \prod_i (R_{K_i/K}\boldsymbol{G}_m)^{n_i}$$

avec $[K_i : K] \leq 6$ (voir les isogénies dans les preuves des lemmes 4.9 et 4.10). Donc d'après le théorème 2.1, tous les tores qui l'en apparaissent ont réduction purement additive.

Le théorème 4.4 est démontré. □

Enfin, considérons les tores de dimension 3. Nous nous contenterons du cas où le corps de déploiement est modérément ramifié.

Théorème 4.11. a) *Le groupe additif* $\boldsymbol{G}_{a,k}^3$ *est v-admissible si et seulement si* $p \neq 2$.

b) *Le groupe* $\boldsymbol{G}_{a,k} \times \boldsymbol{W}_{2,k}$ *est v-admissible si et seulement si* $3 \leq p \leq 7$.

c) *Le groupe des vecteurs de Witt* $\boldsymbol{W}_{3,k}$ *n'est jamais v-admissible.*

Démonstration. Nous utilisons la même approche que dans le cas de dimension 2. On peut se limiter aux tores indécomposables et de plus, aux tores anisotropes (*i.e.* n'ayant pas des sous-tores déployés). En effet, un sous-tore déployé de $T$ ait bonne réduction, et $\tilde{T}$ contiendrait une composante torique.

Pour décrire les tores indécomposables anisotropes de dimension 3, nous utilisons la liste des sous-groupes finis dans $GL(3, \boldsymbol{Z})$ [**32**], avec une correction de [**1**], et quelques descriptions explicites présentées dans [**8**].

Comme ci-dessus, sans restreindre généralité, on peut supposer que $L/K$ soit totalement ramifiée.

Distinguons les cas où $p$ est pair ou impair.

Proposition 4.12. *Si* $p = 2$, *il n'y a pas de K-tores anisotropes de dimension 3 déployés par une extension modérément et totalement ramifiée.*

Démonstration. Soit $T$ un $K$-tore anisotrope de dimension 3, et supposons que son corps de déploiement $L$ soit modérément et totalement ramifié sur $K$. De la classification de sous-groupes finis dans $GL(3, \boldsymbol{Z})$ [**32**], il suit que $[L : K] \leq 48$. Comme $e = [L : K]$ doit être impair, on a $[L : K] = 3$. Comme $\Pi = \mathrm{Gal}(L/K)$ est un groupe cyclique, il y a trois $\boldsymbol{Z}[\Pi]$-modules indécomposables: $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}[\Pi]$ et $\boldsymbol{Z}[\Pi]/\boldsymbol{Z}$. Les tores correspondants à deux premiers modules ne sont pas anisotropes, et le troisième est le tore normique $R^1_{L/K}\boldsymbol{G}_m$. Donc $T$ est de la forme $T = (R^1_{L/K}\boldsymbol{G}_m)^m$ et sa dimension est paire, ce qui contredit l'hypothèse $\dim T = 3$. □

Passons au cas où $p$ est impair. Considérons d'abord un cas particulier.

Proposition 4.13. *Soit p impair, et soit* $T = (K, L, G)$ *un K-tore de dimension 3 tel que G est un sous-groupe fini maximal indécomposable de* $GL(3, \boldsymbol{Z})$. *Supposons que le corps L soit modérément et totalement ramifié sur K. Alors* $\tilde{T}^\circ$ *est isomorphe à* $\boldsymbol{G}_a \times \boldsymbol{W}_2$ *pour* $3 \leq p \leq 7$, *et à* $\boldsymbol{G}_a^3$ *pour* $p \geq 11$.

Démonstration. De la classification de sous-groupes finis dans $GL(3, \boldsymbol{Z})$ [**32**], il suit qu'il y a 3 sous-groupes finis maximaux indécomposables dans $GL(3, \boldsymbol{Z})$ (à conjugaison près); nous les écrivons sous la forme différente de [**32**], cf. [**8**]:

$$G_1=\left\langle\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\rangle,$$

$$G_2=\left\langle\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\rangle,$$

$$G_3=\left\langle\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Comme groupes abstraits, tous ces sous-groupes sont isomorphes à $S_4\times\boldsymbol{Z}/2$. De plus, ils sont tous conjugués entre eux comme sous-groupes de $GL(3,\boldsymbol{Q})$. En effet, pour $G_1$ et $G_2$ c'est immédiat car ils sont duaux l'un à l'autre. En posant

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix},$$

on vérifie directement que $A^{-1}G_1A\simeq G_3$. Puisque $G_1$–$G_3$ sont sonjugués dans $\mathrm{GL}(3,\boldsymbol{Q})$, les tores correspondants $T_1$–$T_3$ sont $K$-isogènes (*voir* [**34**, 3.46]). Il faut remarquer que l'isogénie $T_1\to T_2$ (resp. $T_1\to T_3$) est de degré 4 (resp. 2). Choisissons le tore $T=T_1$ correspondant à $G_1$ comme un représentant de cette classe d'isogénie. On voit que

$$T=R^1_{M/K}N,\quad N=R^1_{S/K}\boldsymbol{G}_m,$$

où $S/K$ est une extension de degré 4 avec la clôture galoisienne à groupe symétrique $S_4$ et où $M/K$ est une extension quadratique linéairement disjointe de $S$ (*voir* lemme 4.6 et [**8**]). On a des isogénies évidentes de degrés $2^l$:

$$R_{M/K}N\to N\times T,\quad x\mapsto(N_{M/K}(x),x^2/N_{M/K}(x)),$$

$$R_{S/K}\boldsymbol{G}_m\to\boldsymbol{G}_m\times N,\quad x\mapsto(N_{S/K}(x),x^4/N_{S/K}(x)),$$

d'où une isogénie

$$T\times R_{S/K}\boldsymbol{G}_m\times R_{M/K}\boldsymbol{G}_m\sim R_{MS/K}\boldsymbol{G}_m\times\boldsymbol{G}_m.$$

Soit $U$ la partie unipotente de la réduction de $T$. Le lemme 1.5 et le théorème 2.1 donnent des isomorphismes

$$U \times (\boldsymbol{W}_2 \times \boldsymbol{G}_a) \times \boldsymbol{G}_a \simeq \boldsymbol{W}_2 \times \boldsymbol{W}_2 \times \boldsymbol{G}_a^3 \quad (p = 3),$$
$$U \times \boldsymbol{G}_a^3 \times \boldsymbol{G}_a \simeq \boldsymbol{W}_2 \times \boldsymbol{G}_a^5 \quad (5 \leq p \leq 7),$$
$$U \times \boldsymbol{G}_a^3 \times \boldsymbol{G}_a \simeq \boldsymbol{G}_a^7 \quad (p \geq 11),$$

d'où le résultat de la proposition. □

LEMME 4.14. a) *Si $3 \leq p \leq 7$, alors le groupe $\boldsymbol{W}_2 \times \boldsymbol{G}_a$ est v-admissible.*
b) *Si $p = 2$, alors le groupe $\boldsymbol{W}_2 \times \boldsymbol{G}_a$ n'est pas v-admissible.*

DÉMONSTRATION. Soient $K = \boldsymbol{Q}_p$, $f(x) = x^4 - p$, $F$ l'extension de $K$ engendrée par une racine de $f(x)$. Comme $f(x) \in K[x]$ est un polynôme d'Eisenstein, $F/K$ est totalement ramifiée. Notons $L$ la clôture normale de $F$. Soit $3 \leq p \leq 7$, alors $\mathrm{Gal}(L/K)$ est, soit le groupe diédrale $D_4$ (il en est ainsi pour $p = 3$ ou 7, car dans ces cas $K$ ne contient pas $\sqrt{-1}$), soit le groupe cyclique $C_4$, c'est-à-dire $F/K$ est normale (c'est le cas pour $p = 5$ quand $K$ contient $\sqrt{-1}$). Dans tous le cas, $L/K$ est modérément ramifiée. D'après le théorème 2.1, le tore $T = R^1_{F/K}\boldsymbol{G}_m$ a la réduction $\tilde{T}^\circ \simeq \boldsymbol{G}_a \times \boldsymbol{W}_2$. Cela démontre la v-admissibilité de $\boldsymbol{G}_a \times \boldsymbol{W}_2$ pour $k = \boldsymbol{F}_p$, $3 \leq p \leq 7$. Soit maintenant $k$ un corps fini arbitraire de caractéristique $p$, $3 \leq p \leq 7$. Alors il faut trouver une extension non ramifiée $K/\boldsymbol{Q}_p$ à corps résiduel $k$. En prenant $T = R^1_{F'/K}\boldsymbol{G}_m$, où $F' = FK$ est le composite de $F$ comme ci-dessus avec $K$, on obtient la v-admissibilité de $\boldsymbol{G}_a \times \boldsymbol{W}_2$ pour n'importe quel $k$ de caractéristique $p$, $3 \leq p \leq 7$, ce qui démontre a).

L'assertion b) suit immédiatement du théorème 4.4(b) est de la proposition 4.12. □

Pour achever la preuve du théorème 4.11, il ne reste qu'à démontrer que lorsque $p \geq 11$, parmi les groupes unipotents de dimension 3, seuls ceux isomorphes à $\boldsymbol{G}_a^3$ sont v-admissibles.

Soit $T = (K, L, G)$ un $K$-tore de dimension 3, anisotrope, indécomposable, avec $L/K$ totalement et modérément ramifiée. On peut supposer que $G \subset G_1$, un sous-groupe fini maximal dans $GL(3, \boldsymbol{Z})$. En considérant l'isogénie du théorème 2.2

$$T \times \prod_i (R_{K_i/K}\boldsymbol{G}_m)^{m_i} \sim \prod_i (R_{K_i/K}\boldsymbol{G}_m)^{n_i}$$

et l'en comparant avec l'isogénie de la démonstration de la proposition 4.13, on conclut que $[K_i : K] \leq 8$, donc seuls groupes additifs peuvent apparaître comme parties unipotentes des réductions des tores $R_{K_i/K}\boldsymbol{G}_m$ (*voir* théorème 2.1).

Le théorème 4.11 est démontré. □

REMARQUE. Dans [**23**]–[**26**], les auteurs construisent des modèles entiers des tores déployés $\boldsymbol{G}_m^d$ de fibre spéciale $\boldsymbol{W}_{d,k}$ pour tous les entiers $d$, mais, bien entendu, ces modèles sont loin d'être minimaux.

## 5. Variétés abéliennes à réduction unipotente.

Dans ce paragraphe, par analogie avec le cas torique, nous considérons le problème inverse de construction d'une variété abélienne à réduction donnée. En utilisant des méthodes d'uniformisation rigide développées dans [**22**], [**2**], nous allons déduire des réponses requises des résultats des paragraphes précédents. (Nous utiliserons une publication récente [**4**] pour les références nécessaires). Notons qu'à la différence de [**29**], [**11**], [**30**], [**31**] nous nous intéressons non seulement au type de la réduction (bonne, multiplicative, unipotente) mais plutôt à sa classe de $k$-isomorphisme.

DÉFINITION 5.1. Soit $k$ un corps fini. Un $k$-groupe commutatif connexe $B$ est dit a-admissible s'il existe un corps $p$-adique $K$ de corps résiduel $k$, et une $K$-variété abélienne $A$ telle que $\tilde{A}^\circ$ soit isomorphe à $B$.

(Ici $\tilde{A}^\circ$ désigne la composante neutre de la fibre spéciale du modèle de Néron $\mathscr{A}$ de $A$).

On peut se poser les questions semblables à celles de §3.

QUESTION 5.2. *Étant donnés un corps fini $k$ et un entier $d$, quels sont les $k$-groupes unipotents de dimension $d$ qui sont a-admissibles?*

QUESTION 5.3. *Le groupe des vecteurs de Witt $\boldsymbol{W}_{d,k}$, est-il a-admissible?*

Pour $d = 1$, la réponse à la question 5.3 est positive et bien connue [11].

On a un résultat général suivant.

THÉORÈME 5.4. *Soit $B$ un $k$-groupe commutatif connexe. Si $B$ est t-admissible, alors $B$ est aussi a-admissible.*

Nous utilisons la téchnique d'uniformisation rigide. Voici un aperçu de notre argument. D'après Raynaud [**22**], toute $K$-variété abélienne $A$ admet l'uniformisation lorsqu'on se trouve dans la catégorie de $K$-espaces rigides. La composante neutre du modèle de Néron (formel) de la variété semi-abélienne $E$ qui uniformise $A$ coïncide avec celle de $A$, d'où la coïncidence des réductions $\tilde{E}^\circ \simeq \tilde{A}^\circ$. Il ne reste qu'à trouver $A$ avec l'uniformisation purement torique. On fait ça à l'aide d'une forme tordue d'un produit direct de quelques exemplaires de la courbe elliptique de Tate.

Reproduisons les définitions et les résultats de la géométrie rigide qui sont indispensables pour nous.

DÉFINITION 5.5 [**4**, 1.1]. Soit $A$ une $K$-variété abélienne. L'uniformisation rigide de $A$ comprend les données suivantes:

- une immersion fermée de $K$-groupes rigides $M \hookrightarrow E$, où $E$ est un $K$-schéma en groupes semi-abélien dont la partie abélienne possède potentiellement bonne réduction, et où $M$ est un réseau de rang maximum dans $E$;
- un morphisme fidèlement plat $f : E \to A$ de $K$-groupes rigides avec $\ker f = M$.

THÉORÈME 5.6 [**22**], [**4**, 1.2]. *Toute $K$-variété abélienne admet l'uniformisation rigide.*

DÉFINITION 5.7 [**4**, 2.1]. Soit $X$ un $K$-espace rigide lisse. Un modèle de Néron formel de $X$ est un $\mathcal{O}$-modèle formel lisse $\mathscr{V}$ d'un sous-espace rigide ouvert $V \subset X$ tel que la propriété de Néron soit satisfaite:

Si $\mathscr{Z}$ est un $\mathcal{O}$-schéma formel lisse à fibre générique $Z$ et si $h_K : Z \to X$ est un morphisme de $K$-espaces rigides, alors on peut prolonger $h_K$ de façon unique à un morphisme de $\mathcal{O}$-schémas formels $h : \mathscr{Z} \to \mathscr{V}$.

PROPOSITION 5.8 [**4**, corollaire de 2.2]. *Soit $X$ un $K$-schéma en groupes lisse commutatif à modèle de Néron $\mathscr{X}$, soit $Y$ le $K$-groupe rigide associé à $X$, et soit $\mathscr{V}$ le modèle de Néron formel de $Y$. Alors les fibres spéciales de $\mathscr{X}$ et de $\mathscr{Y}$ coïncident.*

THÉORÈME 5.9 [**4**, 2.3]. *Soit $f_K : E \to A$ l'uniformisation rigide d'une $K$-variété abélienne $A$. Alors on peut prolonger $f_K$ de façon unique à un morphisme de $\mathcal{O}$-schémas formels $f : \mathscr{E} \to \mathscr{A}$, où $\mathscr{E}$, $\mathscr{A}$ sont les modèles de Néron formels de $E$, $A$; de plus, $f$ induit un isomorphisme des composantes neutres $\mathscr{E}^\circ \simeq \mathscr{A}^\circ$.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.4. Soit $T$ un $K$-tore tel que $\tilde{T}^\circ \simeq U$. On a $T \times_K L \simeq \boldsymbol{G}_{m,L}^d$, où $L$ est le corps de déploiement de $T$.

Considérons la courbe de Tate $C$ définie sur $K$. Soit $C^d$ le produit direct de $d$ exemplaires de $C$. On a l'uniformisation rigide de $C^d$:

$$0 \to \boldsymbol{Z}^d \to \boldsymbol{G}_m^d \to C^d \to 0.$$

On peut tordre la dernière suite exacte par l'action de $\mathrm{Gal}(L/K)$ correspondant au module des caractères de $T$. Nous obtenons la suite

$$0 \to M \to T \to A \to 0$$

qui est l'uniformisation rigide d'une certaine variété abélienne $A$ (qui est une $K$-forme tordue de $C^d$). D'après la proposition 5.8 et le théorème 5.9, on a $\tilde{A}^\circ \simeq \tilde{T}^\circ$, d'où le résultat. $\square$

Voici quelques conséquences immédiates.

COROLLAIRE 5.10. *Soit $k$ un corps fini, alors tout $k$-tore est a-admissible.*

DÉMONSTRATION. Cela suit du théorème 5.4 compte tenu de la proposition 3.2. □

Le corollaire suivant répond à la question 5.3 pour $d = 2$.

COROLLAIRE 5.11. *Si $k$ est un corps fini de caractéristique $p \leq 5$, alors le groupe $\mathbf{W}_{2,k}$ est a-admissible.*

DÉMONSTRATION. Cela suit du théorème 5.4 compte tenu du théorème 4.4. □

REMARQUE. La démonstration du théorème 5.4 fournit des exemples explicites de surfaces abéliennes qui ont réduction du type $\boldsymbol{W}_2$. On peut considérer un corps dyadique $K$ qui admette une extension galoisienne cubique ramifiée $L$, et prendre

$$A = \ker[R_{L/K}C \xrightarrow{N} C],$$

où $C$ désigne la courbe de Tate définie sur $K$. Le tore normique $T = R^1_{L/K}\boldsymbol{G}_m$ est alors l'uniformisation rigide de $A$, d'où le résultat (*voir* théorème 2.1). Si $p = 5$, nous considérons une extension quadratique ramifiée $Q/K$ et la surface abélienne $A$ comme ci-dessus, et nous prenons $S = \ker[R_{Q/K}A \to A]$. Si $p = 3$, nous considérons des extensions quadratiques ramifiées $Q/K$ et $F/K$, et nous posons $S = \ker[R_{QF/K}C \to R_{F/K}C]$. Dans tous les cas, $\tilde{S}^\circ$ est isomorphe à $\boldsymbol{W}_2$ (*voir* lemmes 4.8, 4.9).

Q. Liu nous a communiqué qu'il existe une autre méthode de construire des surfaces abéliennes à réduction de type Witt qui utilise les jacobiennes des courbes de genre deux; *voir* aussi [**21**].

Pour $d$ quelconque, en utilisant un argument suggéré par B. Edixhoven, on peut établir un analogue de la proposition 3.8.

PROPOSITION 5.12. *Pour chaque $d$ il existe un entier $n_0 = n_0(d)$ tel que, si $k$ est un corps de caractéristique $> n_0$, alors, parmi les $k$-groupes unipotents de dimension $d$, seuls soient a-admissibles ceux qui sont isomorphes à $\boldsymbol{G}_a^d$.*

DÉMONSTRATION. D'après [**7**, prop. 3.6], pour toute $K$-variété abélienne $A$, il existe une extension finie galoisienne $L/K$ telle que $A_L = A \times_K L$ ait réduction semi-stable sur $L$; ça veut dire que (la composante neutre de) la réduction $\tilde{A}_L^\circ$ est une extension d'une variété abélienne par un tore. Soit $L$ l'extension minimale avec cette propriété, et soit $n$ l'ordre du groupe de Galois $Gal(L/K)$. Comme nous nous intéressons au cas de réduction purement unipotente, on peut supposer que $L/K$ est totalement ramifiée et que $K$ contient les racines $n$-ièmes de l'unité. Supposons que $p > 2d+1$, alors $p$ ne divise pas $n$ [**31**, cor. 6.3]. De plus, $n$ est borné par une fonction de $d$ (*voir*, soit [**31**, cor. 6.3], soit [**6**, th. 6.1]). Alors, d'après [**6**, rem. 5.4.2], ça implique que, si $p \geq n$, la partie unipotente de $\tilde{A}^{\circ}$ est tué par multiplication par $p$, d'où le résultat. □

Remarque. La proposition ci-dessus donne, par uniformisation rigide, une autre demonstration de la proposition 3.8. Nous ne considérons pas le problème d'explicitation de $n_0 = n_0(d)$. Dans cette direction, on peut appliquer [**30**], [**31**]; *voir* aussi [**20**], [**21**], où l'on considère le cas des jacobiennes généralisées.

Remerciements. Nous remercions S. Bosch, B. Edixhoven, G. Faltings, B. Gross, D. Kazhdan, Q. Liu, D. Lorenzini, B. Mazur, B. Z. Moroz, M. Raynaud, T. Sekiguchi, J.-P. Serre, N. Suwa, V. E. Voskresenskiĭ, X. Xarles et Yu. G. Zarhin pour des discussions fructueuses. Le premier auteur remercie l'Université de Franche-Comté, Harvard University, l'Université de Paris-VII, Sonderforschungsbereich 170 (Universität Göttingen), l'Université de Caen, Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn) et Chuo University pour leur accueil pendant la période quand ce travail a été conçu et accompli.

## Références


[1] E. Ascher et H. Grimmer, Comment on a paper by Tahara on the finite subgroups of $GL(3, \boldsymbol{Z})$, Nagoya Math. J., **48** (1972), 203.

[2] S. Bosch et W. Lütkebohmert, Stable reduction and uniformization of abelian varieties, II, Invent. Math., **78** (1984), 257–297.

[3] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, Néron Models, Ergebnisse Math., 3. Folge, Bd. 21, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1990.

[4] S. Bosch et X. Xarles, Component groups of Néron models via rigid uniformization, Math. Ann., **306** (1996), 459–486.

[5] C. Deninger et E. Nart, Formal groups and $L$-series, Comment. Math. Helv., **65** (1990), 318–333.

[6] B. Edixhoven, Néron models and tame ramification, Compositio Math., **81** (1992), 291–306.

[7] A. Grothendieck, Modèles de Néron et monodromie, Groupes de monodromie en géométrie algébrique, SGA7 I (A. Grothendieck, ed.), Lecture Notes in Math., **288**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1972, 313–523.

[8] B. Kunyavskii, Three-dimensional algebraic tori, Selecta Math. Sov., **21** (1990), 1–21.

[9] B. E. Kunyavskii et B. Z. Moroz, On integral models of affine toric varieties, Proc. St. Petersburg Math. Soc., **7** (1999), 116–123.

[10] B. Kunyavskii et J.-J. Sansuc, Un problème inverse pour la réduction des groupes algébriques commutatifs, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **324** (1997), 307–312.

[11] H. Lenstra et F. Oort, Abelian varieties having purely additive reduction, J. Pure Appl. Algebra, **36** (1985), 281–298.

[12] Q. Liu et D. Lorenzini, Special fibers of Néron models and wild ramification, Preprint éléctronique sur http://www.math.uiuc.edu/Algebraic-Number-Theory/index.html.

[13] B. Z. Moroz, Exercises in analytic arithmetic on an algebraic torus, Israel Math. Conf. Proc., **9** (1996), 347–359.

[14] B. Z. Moroz, On the distribution of integer points in the real locus of an affine toric variety, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., **237** (1997), 283–291.
[15] B. Z. Moroz, On the integer points of some toric varieties, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **48** (1997), 67–82.
[16] B. Z. Moroz, On the integer points of an affine toric variety (general case), Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **50** (1999), 385–395.
[17] E. Nart et X. Xarles, Additive reduction of algebraic tori, Arch. Math. (Basel), **57** (1991), 460–466.
[18] T. Ono, Arithmetic of algebraic tori, Ann. of Math. (2), **74** (1961), 101–139.
[19] F. Oort, Lifting algebraic curves, abelian varieties, and their endomorphisms to characteristic zero, Algebraic Geometry, Proc. Summer Res. Inst., Brunswick/Maine 1985, part 2, Proc. Symp. Pure Math., **46** (1987), pp. 165–195.
[20] D. Penniston, Unipotent groups associated to reduced curves, Preprint éléctronique sur http://www.math.psu.edu/ono/antheory/numtheory.html.
[21] D. Penniston, Unipotent groups and curves of genus two, Preprint éléctronique sur http://www.math.psu.edu/ono/antheory/numtheory.html.
[22] M. Raynaud, Variétés abéliennes et géométrie rigide, Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970, t. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 473–477.
[23] T. Sekiguchi, On the deformation of Witt groups to tori, II, J. Algebra, **138** (1991), 273–297.
[24] T. Sekiguchi et N. Suwa, A case of extensions of group schemes over a discrete valuation ring, Tsukuba J. Math., **14** (1990), 459–487.
[25] T. Sekiguchi et N. Suwa, Théories de Kummer–Artin–Schreier–Witt, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **319** (1994), 105–110.
[26] T. Sekiguchi et N. Suwa, On the unified Kummer–Artin–Schreier–Witt theory, Prépublication, 1999.
[27] G. B. Seligman, On two-dimensional algebraic groups, Scripta Math., **29** (1973), 453–465.
[28] J.-P. Serre, Groupes Algébriques et Corps de Classes, Hermann, Paris, 1959.
[29] J.-P. Serre et J. Tate, Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math. (2), **88** (1968), 492–517.
[30] A. Silverberg et Yu. G. Zarhin, Semistable reduction of abelian varieties over extensions of small degree, J. Pure Appl. Algebra, **132** (1998), 179–193.
[31] A. Silverberg et Yu. G. Zarhin, Subgroups of inertia groups arising from abelian varieties, J. Algebra, **209** (1998), 94–107.
[32] K. Tahara, On the finite subgroups of $GL(3,\boldsymbol{Z})$, Nagoya Math. J., **41** (1971), 169–209.
[33] V. E. Voskresenskiĭ, On two-dimensional algebraic tori, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **73** (1968), 190–195.
[34] V. E. Voskresenskiĭ, Tores Algébriques, "Nauka", Moscou, 1977. (Russe).
[35] V. E. Voskresenskiĭ, Algebraic Groups and Their Birational Invariants, Transl. of Math. Monographs, vol. 179, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1998.
[36] V. E. Voskresenskiĭ et T. V. Fomina, Integral structures in algebraic tori, Russian Acad. Sci. Izv. Math., **59** (1995), 881–897.
[37] W. C. Waterhouse et B. Weisfeiler, One-dimensional affine group schemes, J. Algebra, **66** (1980), 550–568.
[38] X. Xarles, The scheme of connected components of the Néron model of an algebraic torus, J. Reine Angew. Math., **437** (1993), 167–179.

Boris KUNYAVSKIĬ
Department of Mathematics and Computer Science
Bar-Ilan University
52900 Ramat Gan, ISRAEL
E-mail: kunyav@macs.biu.ac.il

Boris Kunyavskiĭ
Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS UMR 9994
Université de Paris-VII–Denis-Diderot
UFR de Mathématiques, case 7012, Tour 45–55, 5-ième étage
2, place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05, FRANCE
E-mail: sansuc@math.jussieu.fr